中学部 数学プリント Ma−41

三角比まとめ　補充プリント

駿台中学部

1 $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$のとき，$\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$の値を求めよ。

2 次の等式を証明せよ。

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\cos^2\theta\tan\theta=1$

(2) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}$

3 $\sin\theta+\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$のとき，$\sin\theta\cos\theta$の値を求めよ。

4 次の値を求めよ。

(1) $\cos 31^\circ+\cos 149^\circ$

(2) $\sin 19^\circ+\sin 161^\circ+2\cos 109^\circ$

$\boxed{5}$ 次の方程式をみたすθを求めよ。ただし$0° \leqq \theta \leqq 180°$とする。

(1) $3\sin\theta = 2\cos^2\theta$

(2) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 0$

$\boxed{6}$ $\triangle$ABC において，次の値を求めよ。

(1) $(b+c):(c+a):(a+b) = 4:5:6$ のときA

(2) $A:B:C = 1:2:3$ のとき A，B，C，$a:b:c$

$\boxed{7}$ 次の$\triangle$ABC の残りの辺の長さや角の大きさを求めよ。

$a = \sqrt{2}$，$B = 45°$，$C = 105°$

$\boxed{8}$ $\triangle$ABC の外接円の半径が 2 で，$a = 2$ かつ$b:c = 2:\sqrt{3}$ のとき，2 辺 b，c の長さを求めよ。

$\boxed{9}$ $\triangle$ABC において，$a\cos A + b\cos B = c\cos C$ が成り立つとき，$\triangle$ABC はどのような三角形か。

$\boxed{10}$ 3 点 A，B，C は同一水平面上で三角形をなし，$AB = 1000\ \mathrm{m}$，$\angle BAC = 60°$，$\angle ABC = 75°$である。。
C 点に高さ h m のテレビ塔があり，B 点からテレビ塔の先端を見たときの水平面から測った角を θとすると

$\tan\theta = \dfrac{1}{10}$である。テレビ塔の高さ h を求めよ。

$\boxed{11}$ 四角形 ABCD において，$AB = 2$，$BC = 4$，$CD = 3$，$\angle ABD = 45°$，$\angle BCD = 60°$である。
△ABD の面積と四角形 ABCD の面積を求めよ。

$\boxed{12}$ 円 O に内接する三角形 ABC があり，$AB = 3$，$BC = 7$，$CA = 5$ である。A を含まない方の弧
$\overset{\frown}{BC}$ 上に $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$ となるような点 D をとり，線分 BC と AD の交点を E とおく。

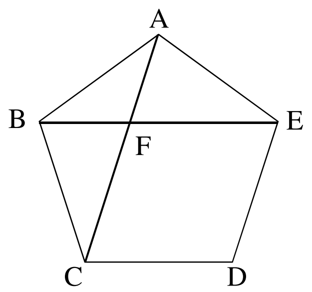
(1) ∠A の大きさを求めよ。

(2) △ABE と△ACE の面積比を求めよ。

(3) △BDE の面積を求めよ。

(4) AD の長さを求めよ。

$\boxed{13}$ 右図の 1 辺の長さが 1 の正五角形について次の問いに答えよ。



(1) $\mathrm{AE} = \mathrm{EF}$を示せ。

(2) $\mathrm{BF} = x$ とするとき，xの値を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ とするとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(4) この正五角形の面積を求めよ。

中学部 数学プリント Ma−41

三角比まとめ 補充プリント 解答

駿台中学部

$\boxed{1}$

$$（与式）=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}=\frac{2\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\sin\theta}=\underline{3}$$

$\boxed{2}$

(1) (左辺) $=1+2\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1=$ (右辺)

(2)（左辺）$=\dfrac{\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\dfrac{2(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}=$ (右辺)

$\boxed{3}$ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=1+2\sin\theta\cos\theta$ において，

$\sin\theta+\cos\theta=\sin\theta\cos\theta=t$ とおくと，$t^2=1+2t\Leftrightarrow t=1\pm\sqrt{2}$

$t=\sin\theta\cos\theta$ より $-1\leqq t\leqq 1$ なので $\sin\theta\cos\theta=\underline{1-\sqrt{2}}$

$\boxed{4}$

(1)（与式）$=\cos 31^\circ-\cos(180^\circ-149^\circ)=\cos 31^\circ-\cos 31^\circ=\underline{0}$

(2)（与式）$=\sin 19^\circ+\sin(180^\circ-161^\circ)+2\cos 109^\circ=2\sin 19^\circ-2\cos(180^\circ-109^\circ)$

$=2\sin 19^\circ-2\cos 71^\circ=2\sin 19^\circ-2\sin(90^\circ-71^\circ)=2\sin 19^\circ-2\sin 19^\circ=\underline{0}$

$\boxed{5}$

(1) $3\sin\theta=2(1-\sin^2\theta)\Leftrightarrow 2\sin^2\theta+3\sin\theta-2=0\Leftrightarrow(2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)=0$

つねに $\sin\theta+2>0$ だから $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ の範囲で $\theta=\underline{30^\circ,\ 150^\circ}$

(2) $\cos\theta=0$ とすれば，$\sin\theta=0$ よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=0\neq 1$ より不適

よって $\cos\theta\neq 0$ である。$\cos\theta$ で両辺を割ると，

$\sqrt{3}\tan\theta+1=0\Leftrightarrow\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ の範囲で $\theta=\underline{150^\circ}$

$\boxed{6}$

(1) $b+c=4k,\ c+a=5k,\ a+b=6k$ とおいて 3 式を加えると

$$a+b+c=\frac{15}{2}k \Leftrightarrow a=\frac{7}{2}k,\ b=\frac{5}{2}k,\ c=\frac{3}{2}k$$

$\frac{1}{2}k=l$ とおいて余弦定理を用いると

$$\cos A=\frac{25l^2+9l^2-49l^2}{2\cdot 5l\cdot 3l}=-\frac{1}{2}$$

よって，$A=\underline{120°}$

(2) $A:B:C=1:2:3$ であり，$A+B+C=180°$から $\underline{A=30°,\ B=60°,\ C=90}$

よって，正弦定理より $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\underline{1:\sqrt{3}:2}$

$\boxed{7}$ $\mathrm{A}=180°-(45°+105°)=\underline{30°}$

正弦定理を用いて $\dfrac{b}{\sin 45°}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30°} \Leftrightarrow b=\dfrac{\sqrt{2}\sin 45°}{\sin 30°}=\underline{2}$

また，$c=2\cos 30°+\sqrt{2}\cos 45°=\underline{\sqrt{3}+1}$

$\boxed{8}$ 正弦定理を用いると，$\dfrac{2}{\sin A}=2\cdot 2 \Leftrightarrow \sin A=\dfrac{1}{2}$

よって，$A=30°$ または $150°$，$b:c=2:\sqrt{3}$ より $b=2k,\ c=\sqrt{3}k$ とおく

$A=30°$ のとき，余弦定理を用いて

$$4k^2+3k^2-2\cdot 2k\cdot\sqrt{3}k\ \cos 30°=4 \Leftrightarrow 7k^2-4\sqrt{3}k^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4 \Leftrightarrow\ k^2=4$$

$k>0$ より，$k=2$　よって $\underline{b=4,\ c=2\sqrt{3}}$

$A=150°$ のとき，余弦定理を用いて

$$4k^2+3k^2-2\cdot 2k\cdot\sqrt{3}k\ \cos 150°=4 \Leftrightarrow 7k^2-4\sqrt{3}k^2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4 \Leftrightarrow\ 13k^2=4$$

$k>0$ より，$k=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$　よって $\underline{b=\dfrac{4\sqrt{13}}{13},\ c=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}}$

$\boxed{9}$ 余弦定理を用いて

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$\Leftrightarrow\ a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)\quad\Leftrightarrow\ c^4-(a^4-2a^2b^2+b^4)=0$

$\Leftrightarrow\ c^4-(a^2-b^2)^2=0 \Leftrightarrow\ (c^2+a^2-b^2)(c^2-a^2+b^2)=0 \Leftrightarrow\ c^2+a^2=b^2$または$b^2+c^2=a^2$

よって $\angle\mathrm{B}=90°$ または$\angle\mathrm{A}=90°$の直角三角形である。

$\boxed{10}$ $C=180°-(60°+75°)=45°$ だから，△ABC に正弦定理を用いて

$$\frac{BC}{\sin 60°}=\frac{1000}{\sin 45°} \Leftrightarrow BC=\frac{1000\sin 60°}{\sin 45°}=500\sqrt{6}$$

よって，$h=\mathrm{BC}\tan\ \theta=500\sqrt{6}\times\frac{1}{10}=\underline{50\sqrt{6}\ \ (\mathrm{m})}$

$\boxed{11}$ △BCD に余弦定理を用いて

$$\mathrm{BD}^2=4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cos 60°=25-24\cdot\frac{1}{2}=13 \quad\Leftrightarrow \mathrm{BD}=\sqrt{13}$$

$$\triangle\,\mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{13}\sin 45°=\underline{\frac{\sqrt{26}}{2}}$$

$\triangle\,\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin 60°=3\sqrt{3}$ であるから

四角形 $\mathrm{ABCD}=\triangle\,\mathrm{ABD}+\triangle\,\mathrm{BCD}=\underline{\frac{\sqrt{26}}{2}+3\sqrt{3}}$

$\boxed{12}$

(1) △ABC に余弦定理を用いて

$$\cos A=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 5}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \angle A=\underline{120°}$$

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{BD}}=\overset{\frown}{\mathrm{DC}}$ より$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$となり，AD は$\angle\mathrm{BAC}$の二等分線となるので

$\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{CAE}(=60°)$ よって，$\mathrm{BE}:\mathrm{CE}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}$ から

$\triangle\,\mathrm{ABE}:\triangle\,\mathrm{ACE}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\underline{3:5}$

(3) $\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{DAC}(=60°)$，$\angle\mathrm{DCB}=\angle\mathrm{DAB}(=60°)$より

△DBC は正三角形で，$\triangle\,\mathrm{DBC}=\frac{1}{2}\cdot 7^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\triangle\,\mathrm{BDE}:\triangle\,\mathrm{CDE}=\mathrm{BE}:\mathrm{CE}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=3:5$ であるから

$$\triangle\,\mathrm{BDE}=\frac{3}{8}\triangle\,\mathrm{DBC}=\underline{\frac{147\sqrt{3}}{32}}$$

(4) $\mathrm{AD}=x$として△ABD に余弦定理を用いると

$7^2=3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cos\ 60° \ \Leftrightarrow\ x^2-3x-40=0 \Leftrightarrow (x-8)(x+5)=0$

$x>0$ より$x=\mathrm{AD}=\underline{8}$

$\boxed{13}$

(1) 正五角形の一つの内角は 108° であり，△ABE は$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}$の二等辺三角形であるので，

$$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{AEB}=\frac{1}{2}(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$$

となる。△ABC と△ABE は合同なので，$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{ABE}=36^\circ$である。

ここで，∠AFE は△ABF の外角なので，$\angle\mathrm{AFE}=\angle\mathrm{ABE}+\angle\mathrm{BAC}=2\times36^\circ=72^\circ$である。

また，$\angle\mathrm{FAE}=\angle\mathrm{BAE}-\angle\mathrm{BAC}=108^\circ-36^\circ=72^\circ$である。

これより，$\angle\mathrm{AFE}=\angle\mathrm{FAE}$ となり，△ AEF は二等辺三角形であり，$\mathrm{AE}=\mathrm{EF}$ である。

(2) (1)より，$\mathrm{EF}=1$であり，△ABF∽△BEA なので

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BE}=\mathrm{BF}:\mathrm{AB}\Leftrightarrow 1:(1+x)=x:1\Leftrightarrow x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=\underline{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\,(x>0)$$

(3) $\cos\theta=\dfrac{1+x}{2}\div1=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ となる。また，$\sin\theta>0$ より，

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\underline{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$$

(4) △ ABC ≡△ CDE ≡△ CFE ≡△ ABE なので，五角形の面積をSとすると，

S = 4 △ ABC −△ ABF となる。

ここで △ ABC $=\dfrac{1}{2}(1+x)\cdot1\cdot\sin\theta$，△ $ABF=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot x\cdot\sin\theta$ より

$$S=\frac{1}{2}\sin\theta\{4(1+x)-x\}=\frac{1}{2}(3x+4)\sin\theta=\frac{1}{2}\left\{\frac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}+4\right\}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\underline{\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}}$$