2023年度

中２選抜･数学　§19 円と角　宿題プリント（問題編）

駿台中学部

〔知識の確認問題〕

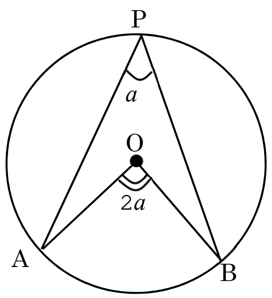
円周角の定理

①　円Ｏ上の２点Ａ，Ｂから，弧ＡＢ以外の円周上の点Ｐにおける見込む角を，弧ＡＢに対する円周角という。

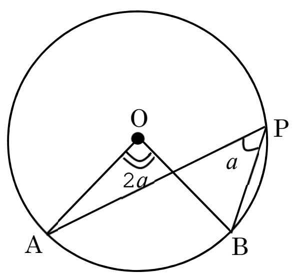
②<u>１つの弧に対する円周角の大きさは，その弧に対する中心角の２分の１である</u>。

$\angle \mathrm{APB} = \frac{1}{2}\mathrm{AOB}$

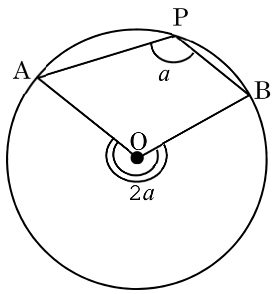
〔パターン１〕



〔パターン２〕

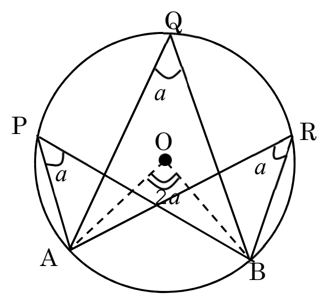


〔パターン３〕



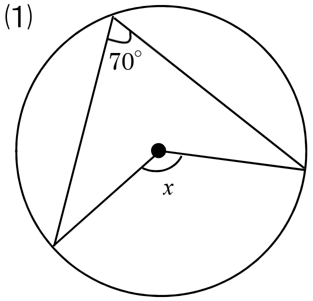
③　<u>同一弧に対する円周角の大きさは等しい</u>。

$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{ARB}\ (=\frac{1}{2}\mathrm{AOB})$

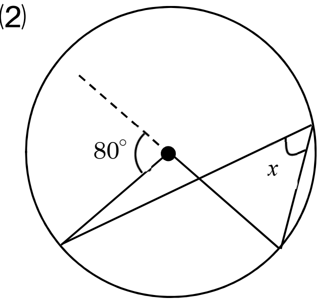


【１】　次の $\underline{x}$ の角度を求めなさい。

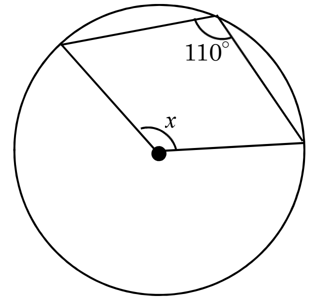
(1)



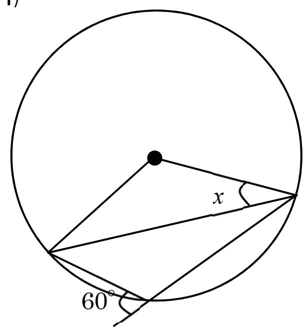
(2)



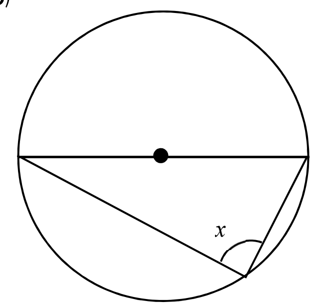
(3)



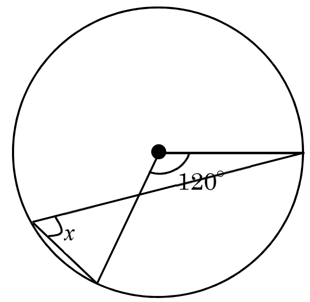
(4)



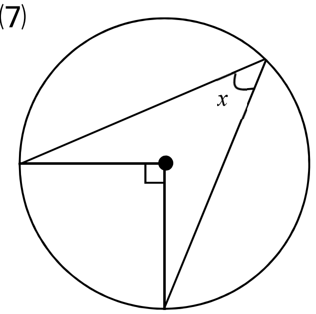
(5)



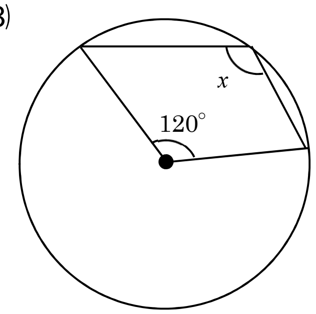
(6)



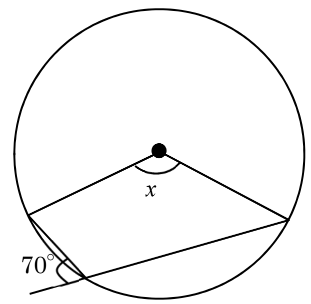
(7)



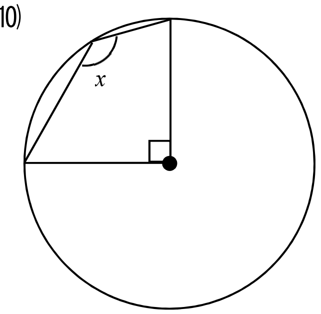
(8)



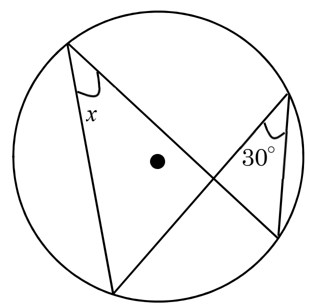
(9)



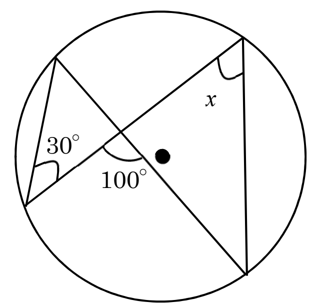
(10)



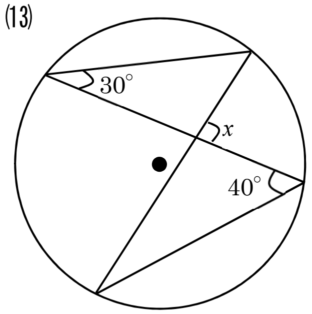
(11)



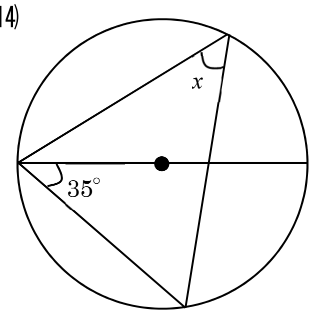
(12)



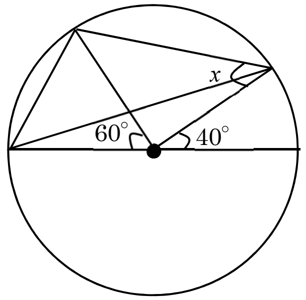
(13)



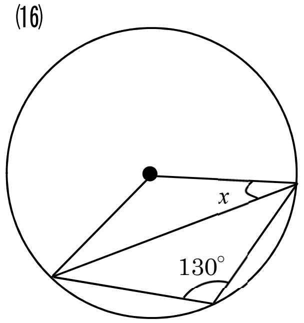
(14)



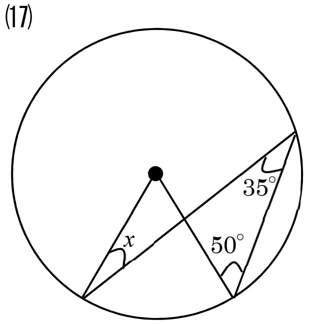
(15)



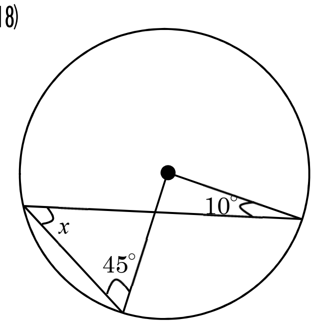
(16)



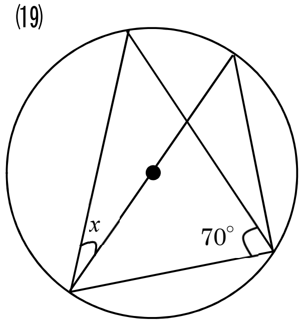
(17)



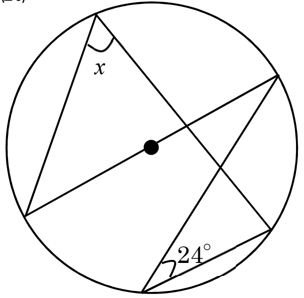
(18)



(19)



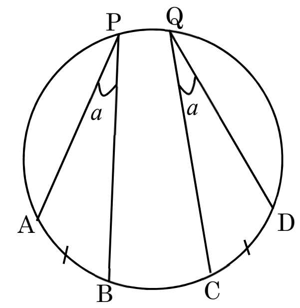
(20)



円周角の弧

① 等しい弧に対する円周角の大きさは等しく，等しい円周角に対する弧の長さは等しい。

$\boxed{弧\ AB=弧\ CD \iff \angle APB=\angle CQD}$



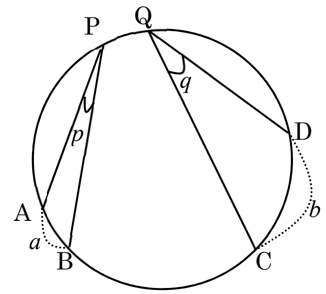
② <u>円周角の大きさは，弧の長さに比例する</u>。

弧 AB$=a$，弧 CD$=b$　$\angle$APB$=p$，$\angle$CQD$=q$

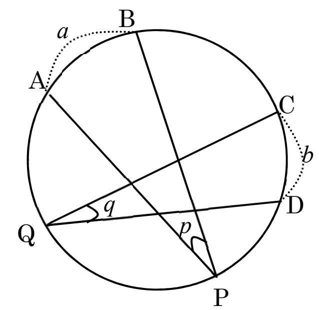
とすると

$\boxed{a : b=p : q}$

〔パターン１〕

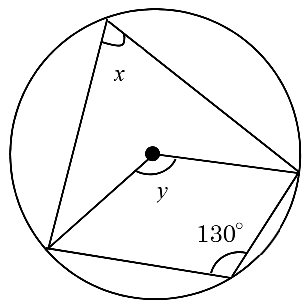


〔パターン２〕

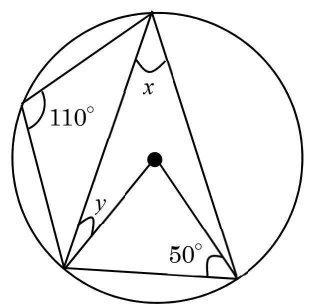


【２】　次の x，y の角度をそれぞれ求めなさい。

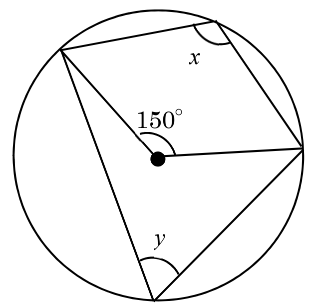
(1)



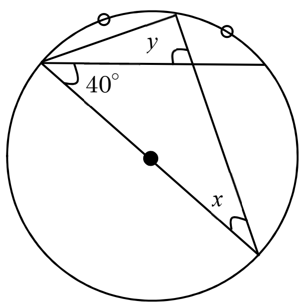
(2)



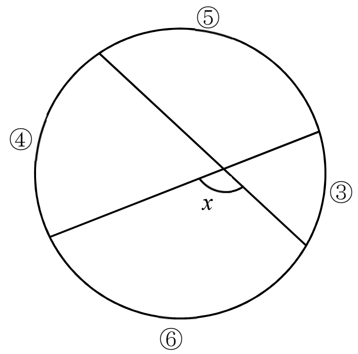
(3)



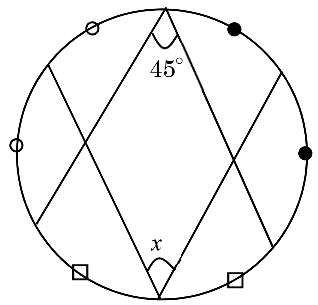
(4)



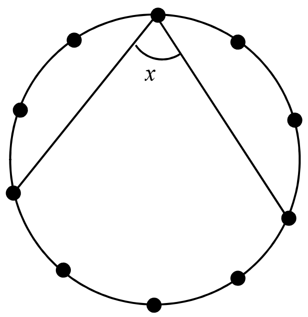
(5)



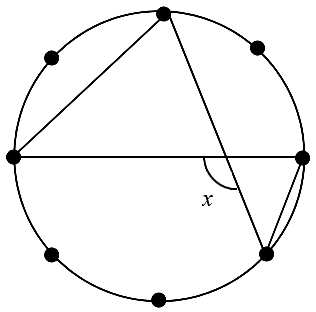
(6)



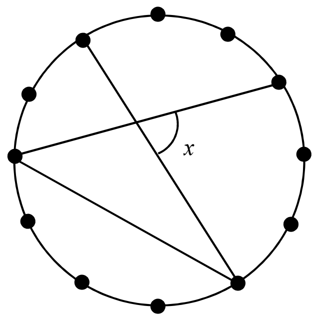
(7)　円周の 10 等分点



(8)　円周の 8 等分点



(9)　円周の 12 等分点



内接四角形の性質

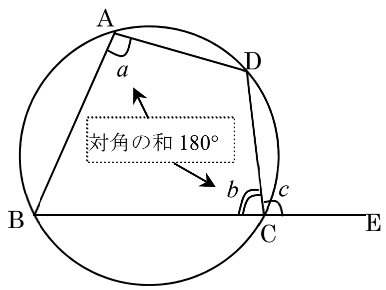
①　４つの頂点が同一円周上にあるような四角形を内接四角形という。

②　内接四角形の対角の和は 180°である。

$\boxed{\angle a + \angle b = 180^\circ}$

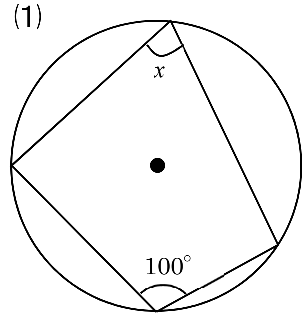
③　内接四角形の１つの外角は，それにとなり合う対角の大きさに等しい。

$\boxed{\angle a = \angle c}$（これを内対角が等しいという）

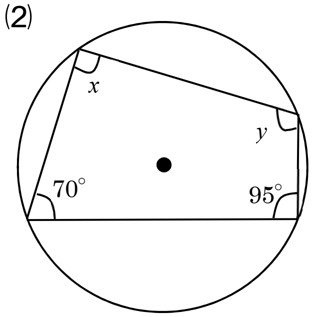


【３】　次の x，y の角度をそれぞれ求めなさい。

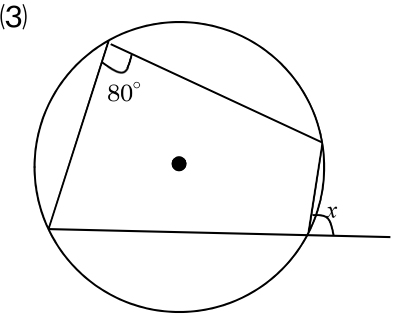
(1)



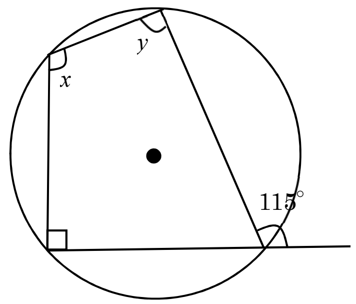
(2)



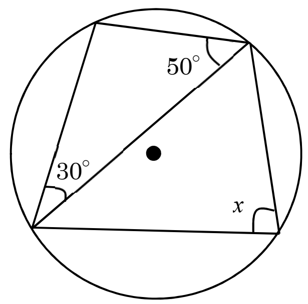
(3)



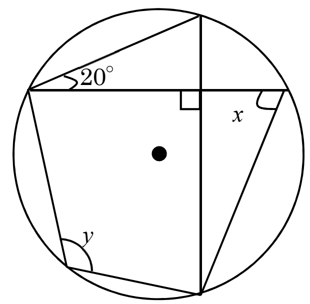
(4)



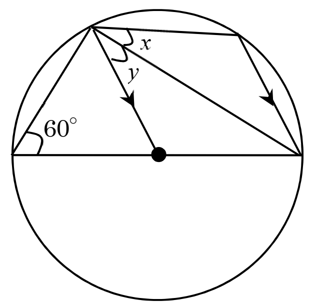
(5)



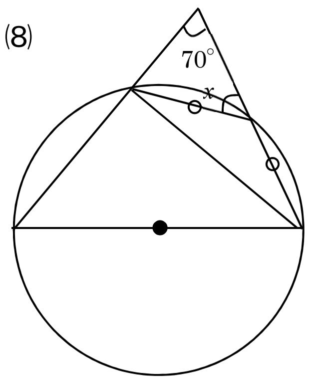
(6)



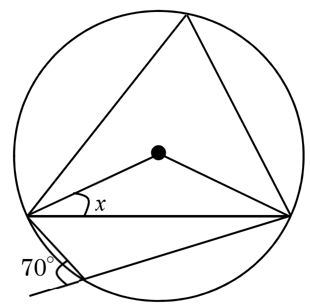
(7)



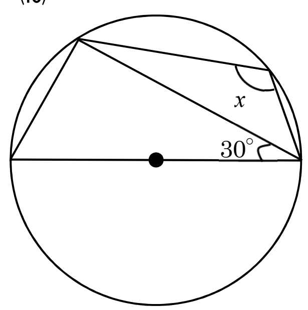
(8)



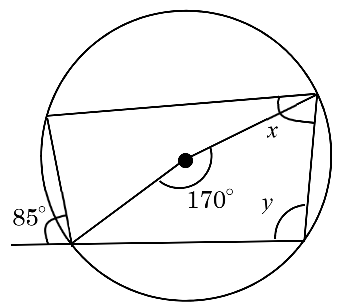
(9)



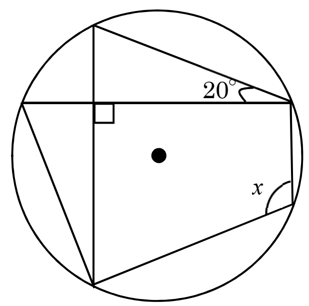
(10)



(11)



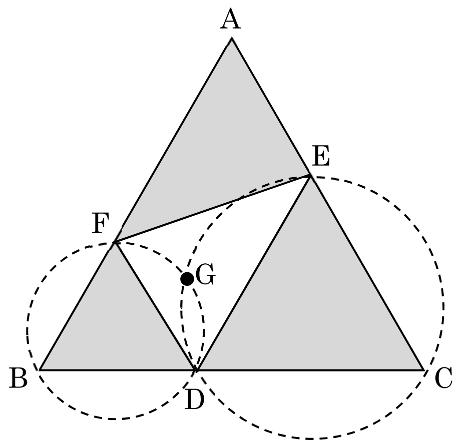
(12)



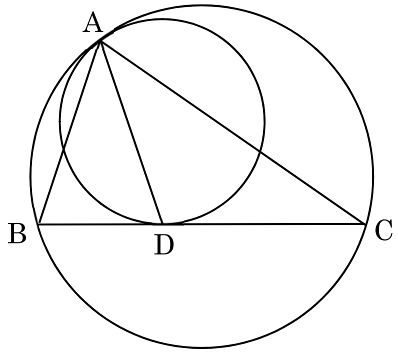
〔応用問題〕

【４】　△ABC の３辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F をとれば，△AEF，△BFD，△CDE の外接円は同じ点において交わることを証明しなさい。

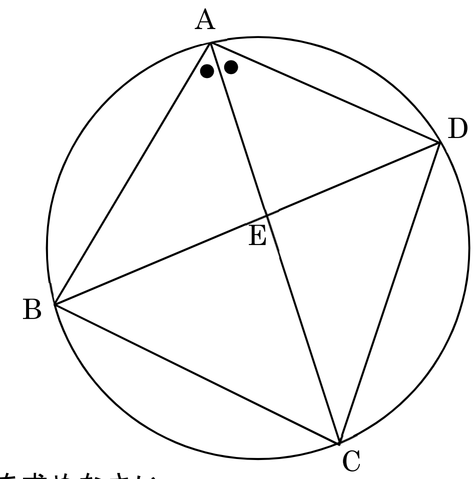
［ヒント：下図より△AEF の外接円が点 G を通ることを証明すること］



【５】　図のように，２つの大小の円が点 A で接している。小さい方の円に点 D で接する直線が，大きい方の円と点 B，C で交わるとき，AD は∠BAC を二等分することを証明しなさい。［ヒント：接弦定理を利用すること］



【６】　円に内接する四角形 ABCD がある。対角線 AC と BD の交点を E とし，AB＝8，BD＝10，AD＝6　とする。∠BAC＝∠CAD とするとき，次の各問いに答えなさい。



⑴　△BCD はどんな三角形か。

⑵　四角形 ABCD の面積を求めなさい。

⑶　BE : ED　を求めなさい。

⑷　BC の長さを求めなさい。

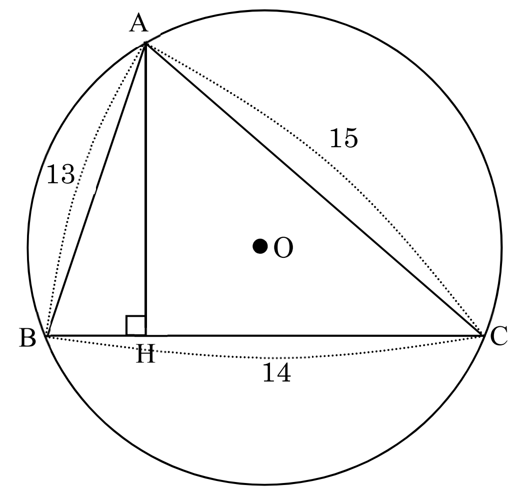
⑸　AE＝x，EC＝y　とおくとき，積 xy の値を求めなさい。

⑹　x の値を求めなさい。

【７】　下図の△ABC において，AB＝13，BC＝14，CA＝15，A から BC におろした垂線の足を H，△ABC の外接円の中心を O とする。このとき，次の問いに答えなさい。

⑴　AH の長さを求めなさい。

⑵　△ABC の外接円の半径を求めなさい。



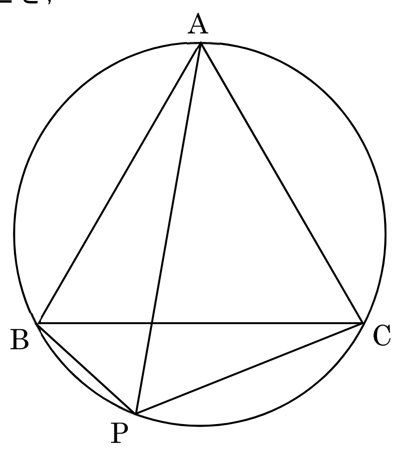
〔発展問題〕

【８】　下図のように，正三角形 ABC とその外接円があり，弧 BC(ただし点 A を含まない方)上に点 P をとるとき，次の問いに答えなさい。

⑴　線分 AP 上に AQ＝BP となる点 Q をとる。このとき，△PBC≡△QAC　となることを証明しなさい。

⑵　AP＝BP＋CP　となることを証明しなさい。

⑶　AP＝6　とするとき，四角形 ABPC の面積を求めなさい。

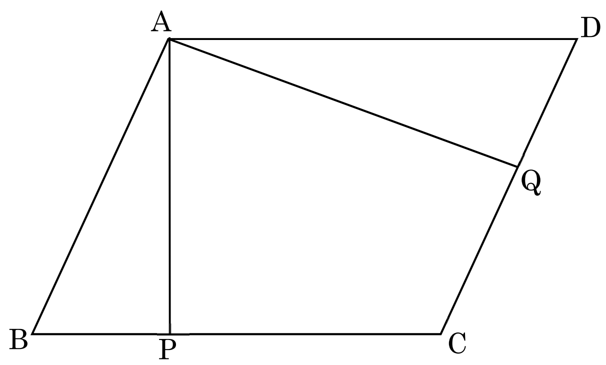


【９】　図のような平行四辺形 ABCD があり，AB＝$\sqrt{5}$ cm である。頂点 A から辺 BC，CD に垂線を引き，その交点をそれぞれ P，Q とすると，BP : PC＝1 : 2 であり，CQ : QD＝2 : 3 であるという。このとき，次の問いに答えなさい。

⑴　辺 AD の長さを求めなさい。

⑵　△ABC∽△PAQ　であることを証明しなさい。

⑶　△ABC の外接円の半径を求めなさい。



2023 年度

中２選抜･数学　§19 円と角　宿題プリント（解答解説編）

駿台中学部

【１】の解答

⑴　$x=140°$	⑵　$x=50°$	⑶　$x=140°$
⑷　$x=30°$	⑸　$x=90°$	⑹　$x=60°$
⑺　$x=45°$	⑻　$x=120°$	⑼　$x=140°$
⑽　$x=135°$	⑾　$x=30°$	⑿　$x=70°$
⒀　$x=70°$	⒁　$x=55°$	⒂　$x=50°$
⒃　$x=40°$	⒄　$x=15°$	⒅　$x=35°$
⒆　$x=20°$	⒇　$x=66°$	

【２】の解答

⑴　$x=50°$，$y=100°$	⑵　$x=40°$，$y=20°$	⑶　$x=105°$，$y=75°$
⑷　$x=25°$，$y=65°$	⑸　$x=110°$	⑹　$x=\left(\dfrac{135}{2}\right)°$
⑺　$x=72°$	⑻　$x=112.5°$	⑼　$x=75°$

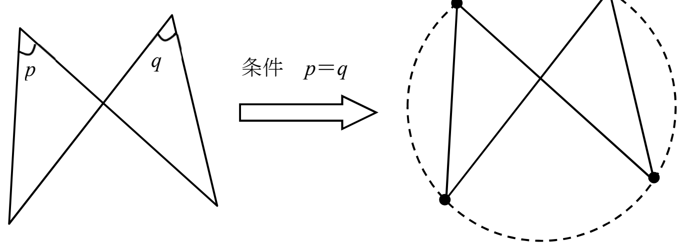
【３】の解答

⑴　$x=80°$	⑵　$x=85°$，$y=110°$	⑶　$x=80°$
⑷　$x=115°$，$y=90°$	⑸　$x=80°$	⑹　$x=70°$，$y=110°$
⑺　$x=30°$，$y=30°$	⑻　$x=40°$	⑼　$x=20°$
⑽　$x=120°$	⑾　$x=85°$，$y=95°$	⑿　$x=110°$

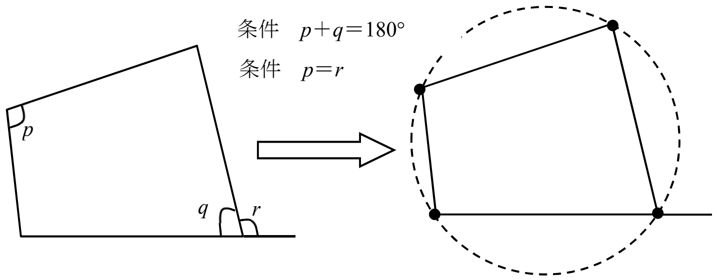
【４】の解説

４つの点が同一円周上にある条件

①　円周角の定理の逆



②　内接四角形の性質の逆



△BFD, △CDE の外接円が交わる点 D 以外の点を G とする。すると, 四角形 BDGF, 四角形 CDGE は円に内接するので,

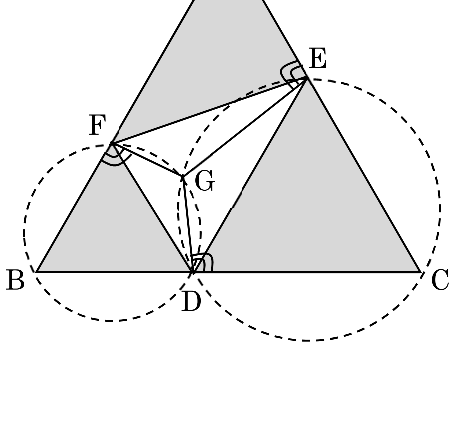
∠BFG＝∠CDG　(内対角が等しい)・・・・・①

∠CDG＝∠AEG　(内対角が等しい)・・・・・②

①, ②より,

∠BFG＝∠AEG　・・・・・③

すると, 四角形 AFGE は③より内対角が等しいので円に内接する。△AFE はこの円に内接しているから△AEF, △BFD, △CDE の外接円は同じ点 G において交わる。



【５】の解説

大小２つの円が接している点 A に接線ℓを引き，その接線上に点 G をとる。

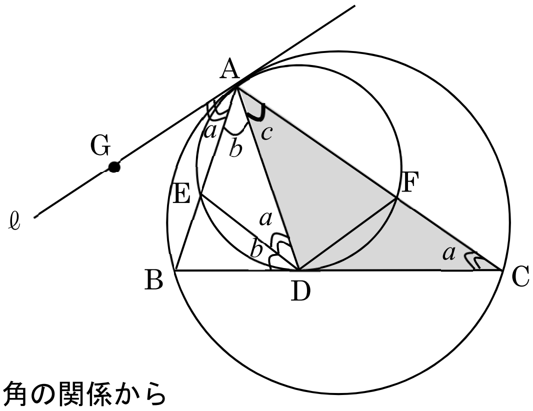
接弦定理により，

大円では　∠GAB＝∠ACB　・・・・①

小円では　∠GAB＝∠ADE　・・・・②

よって，①，②より

∠ACB＝∠ADE　・・・・③



また，BC は小円に点 D で接しているので，

接弦定理より

∠BDE＝∠BAD　・・・・④

すると，△ACD において，三角形の内角と外角の関係から

∠ADE＋∠BDE＝∠DAC＋∠ACB

③より　　∠BDE＝∠DAC　・・・・⑤

④，⑤より　∠BAD＝∠BDE＝∠DAC

よって，AD は∠BAC を二等分する。

［　図では　$a+c=a+b$　→　$c=b$　　となることがわかる　］

【６】の解説

⑴　△ABD は，AB : AD : BD＝8 : 6 : 10＝4 : 3 : 5

となるから，∠BAD＝90°の直角三角形。

すると，BD は直径であり，四角形 ABCD は

内接四角形なので，

∠BCD＝180°－90°＝90°　・・・・・・①

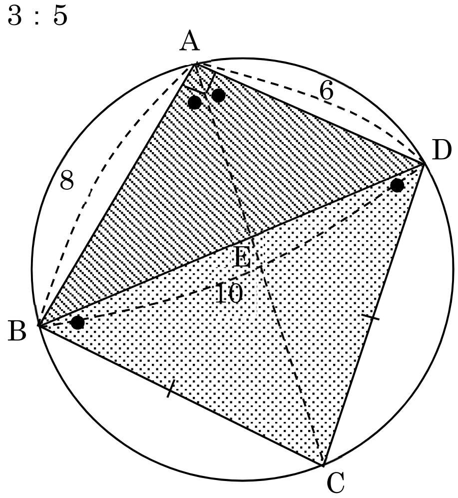
また，∠BAC＝∠BDC（同一弧）

∠DAC＝∠DBC（同一弧）

∠BAC＝∠DAC（仮定）より

∠BDC＝∠DBC・・・・・②

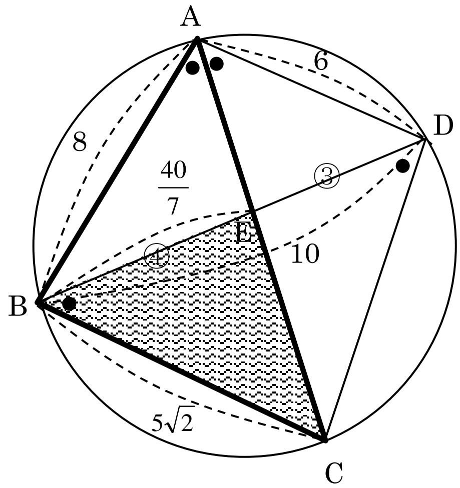
①，②より，<u>△BCD は直角二等辺三角形</u>



⑵　四角形 ABCD の面積＝△ABD＋△BCD＝$8\times6\times\frac{1}{2}+10\times10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\underline{49}$

⑶　角の二等分線と比より

BE：ED＝AB：AD＝8：6＝$\underline{4：3}$



⑷　⑶より

$BE＝\dfrac{4}{4+3}BD＝\dfrac{4}{7}\times 10＝\dfrac{40}{7}$

また，△BCD は直角二等辺三角形より

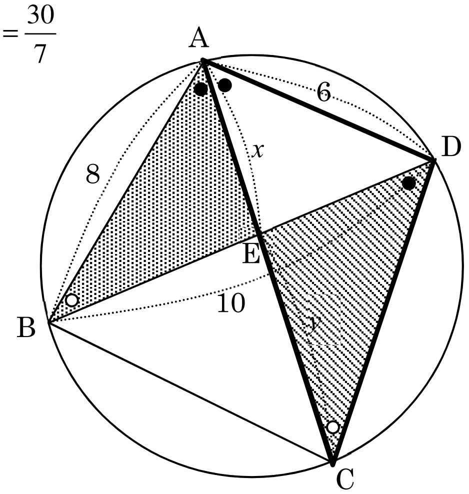
$BC＝\dfrac{1}{\sqrt{2}}BD＝\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times 10＝5\sqrt{2}$

ここで，△ABC∽△BEC（二角相等）

だから　　AB：BE＝BC：EC

→　$8：\dfrac{40}{7}＝5\sqrt{2}：EC$　　$EC＝\underline{\dfrac{25\sqrt{2}}{7}}$

⑸　⑷より　$BE＝\dfrac{40}{7}$　だから　$DE＝10-\dfrac{40}{7}=\dfrac{30}{7}$



△ABE∽△DEC（二角相等）より

AE：DE＝BE：CE

→　$x：\dfrac{30}{7}＝\dfrac{40}{7}：y$

→　$xy＝\dfrac{30}{7}\times\dfrac{40}{7}＝\underline{\dfrac{1200}{49}}$　・・・・④

⑹　△ABE∽△ACD（二角相等）より

AB：AC＝AE：AD

→　$8：(x+y)＝x：6$　　→　$x(x+y)＝48$

→　$x^2+xy＝48$・・・・・・⑤

④，⑤より，　$x^2+\dfrac{1200}{49}＝48$　　→　$x^2=\dfrac{1152}{49}$　　→　$x=\underline{\dfrac{24\sqrt{2}}{7}}(>0)$

【７】の解説

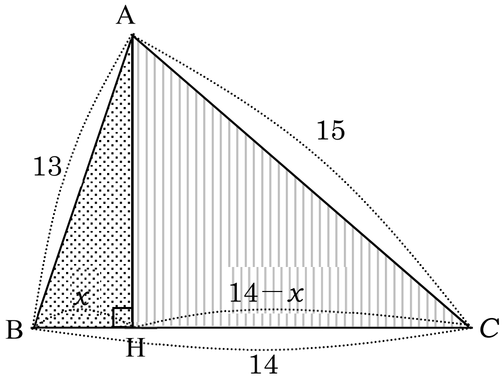
⑴　BH＝x　とおくと，

AB²－BH²＝AC²－CH²

$$13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$$

これを解いて，x＝5

∴　AH＝$\sqrt{13^2-5^2}$ ＝<u>12</u>



⑵　A から O を通り，A とは反対側の円 O と交わる点を D とする。

ここで，△ABH と△ADC において

∠ABH＝∠ADC（同一弧）・・・・①

AD は直径なので

∠AHB＝∠ACD＝90°・・・・・②

①，②より，二角相等

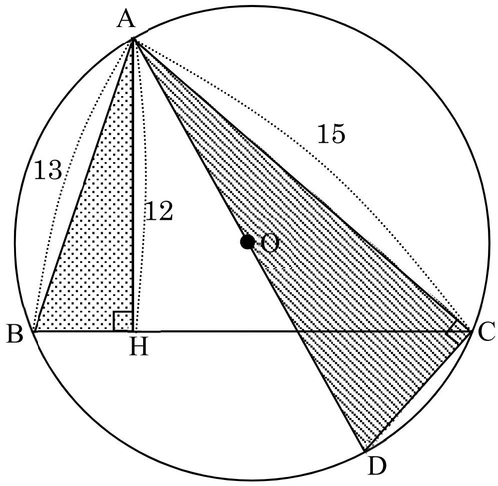
∴　△ABH∽△ADC

すると，　AB：AD＝AH：AC・・③

外接円 O の半径を R とおくと，③より

13：2R＝12：15

24R＝13×15　→　R＝$\underline{\dfrac{65}{8}}$



【８】の解説

⑴　△PBC と△QAC において

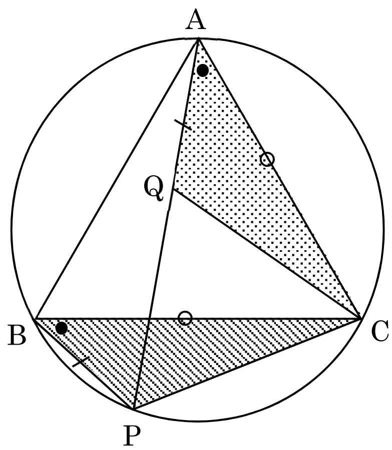
∠PBC＝∠PAC（同一弧）・・・①

BC＝AC（仮定）・・・・・・②

BP＝AQ（仮定）・・・・・・③

①，②，③より，二辺比夾角相等

∴　△PBC≡△QAC



⑵　⑴より，PC＝QC・・・・④

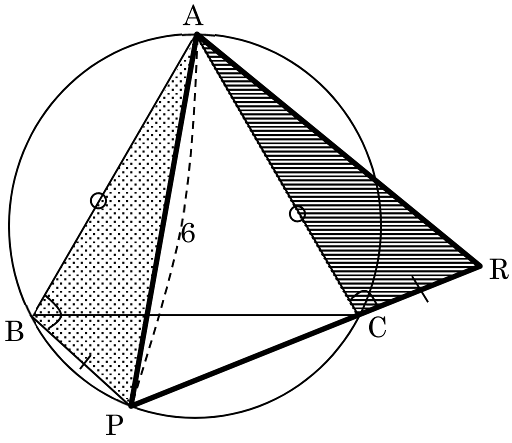
また，∠PCB＝∠QCA　なので

∠PCQ＝∠PCB＋∠BCQ

＝∠QCA＋∠BCQ＝∠ACB＝60°・・・・・⑤

④，⑤より，△PCQ は正三角形

∴　AP＝AQ＋PQ＝BP＋CP　（証明終）



⑶　右図のように，PC の延長上に BP＝CR となる R をとる。

△ABP と△ACR において

∠ABP＝∠ACR（内対角）・・・①

BP＝CR（仮定）・・・・・・②

AB＝AC（仮定）・・・・・・③

①，②，③より，二辺夾角相等

∴　△ABP≡△ACR

合同な三角形では対応する辺の長さ、角の大きさは等しいので

AP＝AR・・・・・・・・・・④

∠BAP＝∠CAR・・・・・・⑤

ここで，⑤から

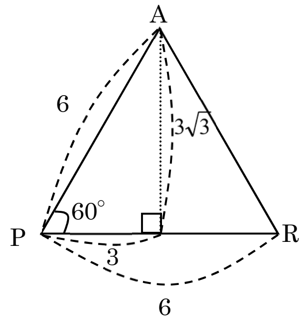
∠PAR＝∠PAC＋∠CAR＝∠PAC＋∠BAP＝∠BAC＝60°　・・・・⑥

④，⑥より，△APR は１辺が 6 の正三角形なので

四角形 ABPC の面積＝△ABP＋△APC

＝△ACR＋△APC

＝△APR＝$6\times3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$＝$\underline{9\sqrt{3}}$



【９】の解説

⑴　△ABP∽△ADQ（二角相等）より

AB：AD＝BP：DQ・・・①

ここで，BP＝x　とおくと，PC＝$2x$

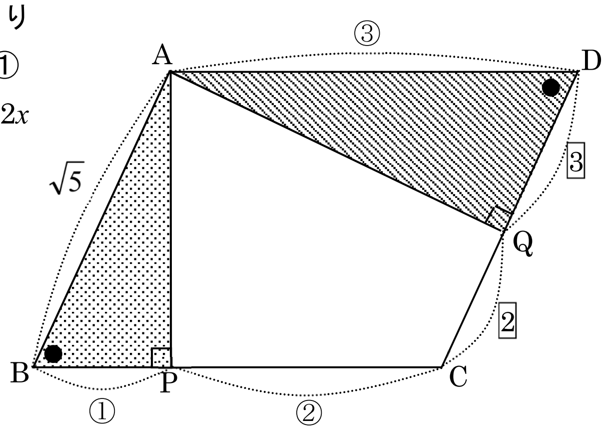
AD＝BP＋PC＝$x+2x=3x$

また，DQ＝$\sqrt{5}\times\frac{3}{2+3}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

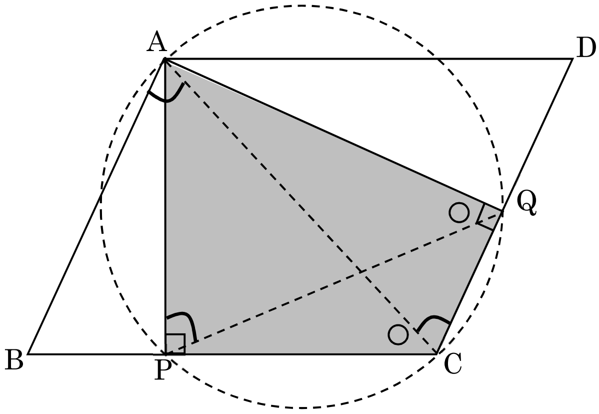
①より，$\sqrt{5}:3x=x:\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$3x^2=3$　→　$x=1$

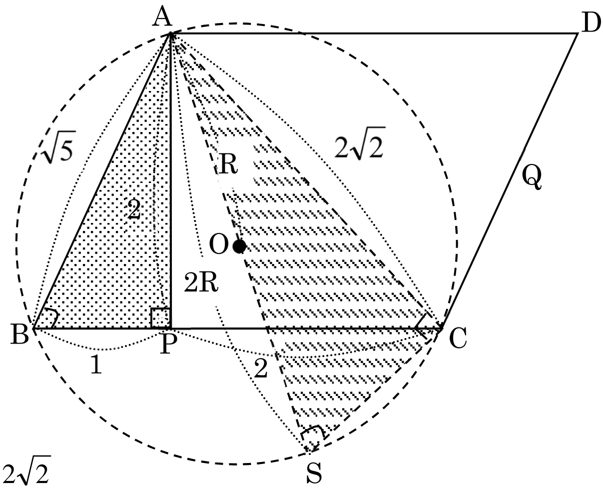
よって，AD＝$3x$＝3×1＝$\underline{3\text{（cm）}}$



⑵　∠APC＝∠AQC＝90°より，∠APC＋∠AQC＝180。対角の和が 180°より
四角形 APCQ は円に内接する。
ここで，△ABC と△PAQ において，BA//CD なので
∠BAC＝∠ACD（錯角）・・・①
∠APQ＝∠ACQ（同一弧）・・②
①，②より
∠BAC＝APQ・・・・・・・・③
∠ACP＝∠AQP（同一弧）・・・④
③，④より，二角相等
∴　△ABC∽△PAQ　（証明終）



⑶　△ABC の外接円の中心を O とする。
また，A から O を通り，A とは反対側の円 O と交わる点を S とする。
ここで，△ABP と△ASC において
∠ABP＝∠ASC（同一弧）・・・・①
AS は直径なので
∠APB＝∠ACS＝90°・・・・・②
①，②より，二角相等
∴　△ABP∽△ASC
すると，　AB：AS＝AP：AC・・③
⑴より，BP＝1，PC＝2　から，



AP＝$\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$，　AC＝$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

外接円 O の半径を R とおくと，③より

$\sqrt{5}$ ：2R＝2：$2\sqrt{2}$　→　4R＝$2\sqrt{10}$　→　R＝$\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$（cm）