中学部 数学プリント Ma-12

絶対値 総合復習プリント

駿台中学部

$\boxed{1}$ 次の方程式を解け。

(1) $\sqrt{x+3}=x-3$

(2) $|x-2|=2x+3$

(3) $x|x|-|2x-1|=0$

$\boxed{2}$ 次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=2|x+1|-|x-2|$

(2) $y=x|x|$

(3) $y=\big||x+1|-3\big|$

$\boxed{3}$ $f(x)=|x+3|+3|x-1|-2|x-2|$ について次の問いに答えよ。

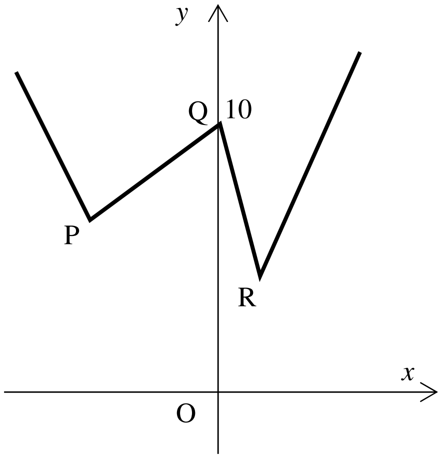
(1) $f(-3)$，$f(1)$，$f(2)$ の値を求めよ。

(2) $x \geqq 2$ における$y=f(x)$ のグラフの傾きを求めよ。

(3) $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(4) x の不等式$f(x) \geqq 3x+1$ を解け。

$\boxed{4}$ $f(x)=a|x+3|+b|x|+c|x-1|$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになった。点 P，R の y 座標がそれぞれ 7，5 であるとき，次の問いに答えよ。



(1) a，b，c の値を求めよ。

(2) $f(x) \leqq -x+6$ を解け。

(3) x についての方程式 $f(x)-mx-9=0$ が，異なる 4 つの解をもつような m の値の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$ $f(x)=|2x+4|+x$ について次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $a \leqq x \leqq a+3$ における $f(x)$ の最小値およびそのときの x の値を次の各場合について求めよ。

(ⅰ) $a<-5$

(ⅱ) $-5 \leqq a \leqq -2$

(ⅲ) $-2<a$

(3) a についての方程式 $f(a)=f(a+3)$ を解け。

(4) $a \leqq x \leqq a+3$ における $f(x)$ の最大値およびそのときの x の値を a について場合分けして求めよ。

$\boxed{6}$ $|x|+|y|=1$ のとき，$|2x+y|+|x-3y|$ の最小値とそのときの x，y の値を求めよ。

絶対値 総合復習プリント　解答解説

駿台中学部

1

(1) （与式） $\Leftrightarrow x-3 \geqq 0$ …① かつ $x+3=(x-3)^2$ …②

①より，$x \geqq 3$

②より，$x^2-7x+6=0$　$\therefore\ x=1,\ 6$

$x \geqq 3$より，$x=6$ …(答)

(2) （与式） $\Leftrightarrow 2x+3 \geqq 0$ …① かつ $x-2=\pm(2x+3)$ …②

①より，$x \geqq -\frac{3}{2}$

②より，$x-2=2x+3$ または $x-2=-2x-3$　$\therefore\ x=-5, -\frac{1}{3}$

$x \geqq -\frac{3}{2}$ より，$x=-\frac{1}{3}$ …(答)

(3) $|x|=0$ より $x=0$，$|2x-1|=0$ より $x=\frac{1}{2}$ なので，

(i) $x<0$，(ii) $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$，(iii) $\frac{1}{2}<x$ で場合分け。

(i) $x<0$ のとき，$|x|=-x$，$|2x-1|=-(2x-1)$ より，

$x|x|-|2x-1|=-x^2+2x-1=0$

$\therefore\ x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ より，$x=1$

$x<0$を満たさず不適。

(ii) $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ のとき，$|x|=x$，$|2x-1|=-(2x-1)$より，

$x|x|-|2x-1|=x^2+2x-1=0$，$x=-1\pm\sqrt{2}$

$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ より，$x=-1+\sqrt{2}$

(iii) $\frac{1}{2}<x$ のとき，$|x|=x$，$|2x-1|=2x-1$より，

（与式） $\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$，$x=1$

$\frac{1}{2}<x$ より，$x=1$

以上より，$x=1$，$-1+\sqrt{2}$ …(答)

$\boxed{2}$

(1) $$y=\begin{cases}-2(x+1)+(x-2)=-x-4 & (x\leqq -1)\\ 2(x+1)+(x-2)=3x & (-1\leqq x\leqq 2)\\ 2(x+1)-(x-2)=x+4 & (2\leqq x)\end{cases}$$

(2) $$y=x|x|=\begin{cases}-x^2 & (x\leqq 0)\\ x^2 & (0\leqq x)\end{cases}$$

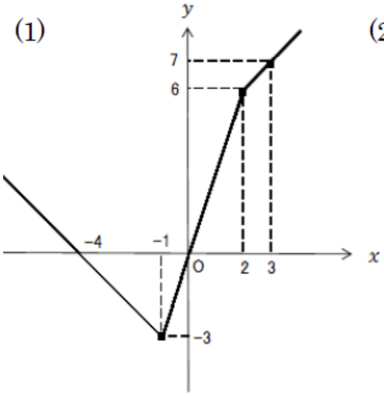
(3) $x<-1$ のとき，$x+1<0$ より，$|x+1|=-x-1$

よって　$$y=|-x-1-3|=|-x-4|=|x+4|=\begin{cases}-x-4 & (x\leqq -4)\\ x+4 & (-4\leqq x<-1)\end{cases}$$

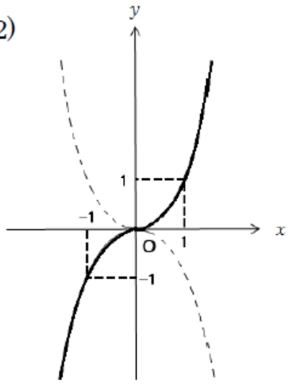
$-1\leqq x$ のとき，$x+1\geqq 0$ より，$|x+1|=x+1$

よって　$$y=|x+1-3|=|x-2|=\begin{cases}-x+2 & (-1\leqq x<2)\\ x-2 & (2\leqq x)\end{cases}$$

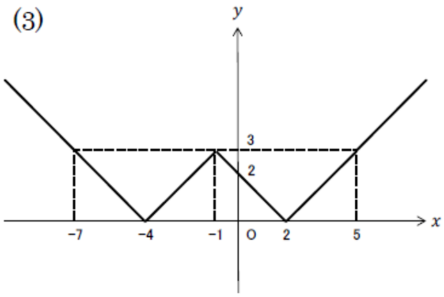
(1)



(2)



(3)



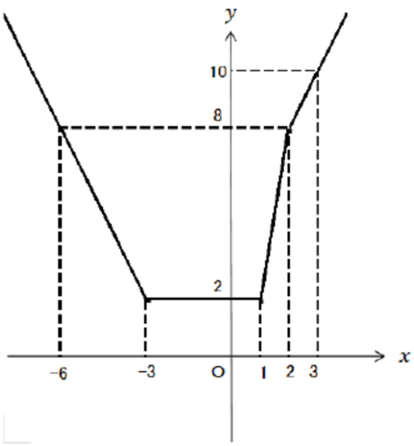
$\boxed{3}$ (1) $f(-3) = 0 + 3 \times |-4| - 2|-5| = 2$

$f(1) = |4| + 3 \times 0 - 2|-1| = 2$

$f(2) = |5| + 3|1| - 2 \times 0 = 8$

(2) $1 + 3 - 2 = 2$

(3)



(4) $y = 3x + 1$ のグラフは，$y = f(x)$ のグラフと

$-3 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq x \leqq 2$，$2 \leqq x$ の範囲でそれぞれ 1 回ずつ交わる。

交点の x 座標は，

(i) $-3 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x) = 2$ より，

$3x + 1 = 2$ を解いて $x = \dfrac{1}{3}$

(ii) $1 \leqq x \leqq 2$ のとき $f(x) = 6x - 4$ より，

$6x - 4 = 3x + 1$ を解いて $x = \dfrac{5}{3}$

(iii) $2 \leqq x$ のとき $f(x) = 2x + 4$ より，

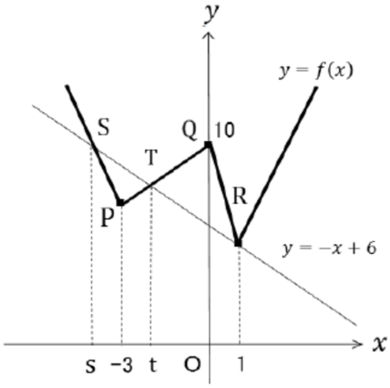
$2x + 4 = 3x + 1$ を解いて $x = 3$ となり，

グラフの上下位置関係より，　$x \leqq \dfrac{1}{3}$，$\dfrac{5}{3} \leqq x \leqq 3$ …(答)

$\boxed{4}$

(1) $x+3=0$, $x-1=0$ よりP, Rの x 座標はそれぞれ $x=-3$, 1
よって $f(-3)=3b+4c=7$, $f(0)=3a+c=10$, $f(1)=4a+b=5$
を連立させて，$a=2$, $b=-3$, $c=4$ …(答)

(2) $y=f(x)$ のグラフに $y=-x+6$ のグラフを重ねると，
図のように2つのグラフは点S, Tで交わり，点Rで
1点で交わることがわかる。
よってS, Tの x 座標をそれぞれ s, t とすると，
グラフの上下位置関係より
$f(x) \leqq -x+6 \Leftrightarrow s \leqq x \leqq t$, $x=1$
$x \leqq -3$ のとき $f(x)=-a(x+3)-bx-c(x-1)=-3x-2$
$-3 \leqq x \leqq 0$ のとき $f(x)=a-bx-c(x-1)=x+10$
よって $-3x-2=-x+6$ より $s=-4$, $x+10=-x+6$ より $t=-2$
$\therefore$ $-4 \leqq x \leqq -2$, $x=1$ …(答)



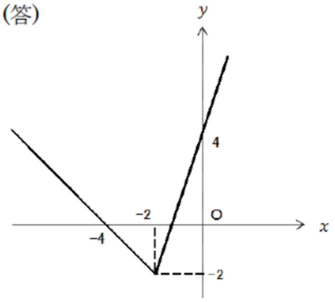
(3) $f(x)-mx-9=0 \Leftrightarrow f(x)=mx+9$ より，$y=f(x)$ のグラフと，
点$(0,\ 9)$を通る傾き m の直線が4点で交わるような m の値の範囲を求める。
$y=f(x)$ の $x \leqq -3$, $1 \leqq x$ における傾きは，それぞれ -3, 3 であることから
この範囲で交わるために $-3<m<3$ …① が必要。
$y=mx+9$ が 点P$(-3,\ 7)$, 点R$(1,\ 5)$ を通るとき，
それぞれ $m=\dfrac{2}{3}$, -4 より，$-4<m<\dfrac{2}{3}$ …②

①かつ②より，$-3<m<\dfrac{2}{3}$ …(答)

5 (1)

$$f(x)=\begin{cases} 2x+4+x=3x+4 & (-2 \leqq x) \\ -2x-4+x=-x-4 & (x<-2) \end{cases}$$

(答)



(2) (i) $a<-5$ のとき

$x=a+3(<-2)$ のとき最小値：$f(a+3)=-(a+3)-4=-a-7$ …(答)

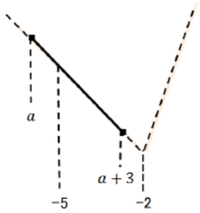
(ii) $-5 \leqq a \leqq -2$ のとき

$x=-2$ のとき最小値：$f(-2)=-2$ …(答)

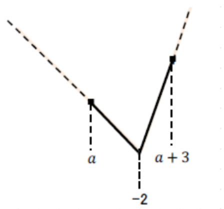
(iii) $-2<a$ のとき

$x=a(>-2)$ のとき最小値：$f(a)=3a+4$ …(答)

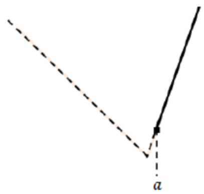
(i) $a<-5$ のとき



(ii) $-5 \leqq a \leqq -2$ のとき



(iii) $-2<a$ のとき



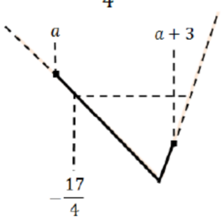
(3) $f(a)=f(a+3) \Rightarrow a<-2<a+3$ より，

$f(a)=-a-4$，$f(a+3)=3a+13$

$\therefore -a-4=3a+13$ より，$a=-\dfrac{17}{4}$ …(答)

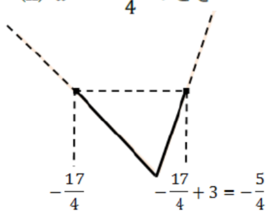
(4)

(i) $a<-\dfrac{17}{4}$ のとき



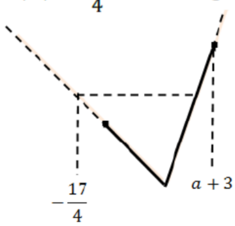
最大値：$f(a)=-a-4$

(ii) $a=-\dfrac{17}{4}$ のとき



最大値：$f\left(-\dfrac{17}{4}\right)=f\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

(iii) $-\dfrac{17}{4}<a$ のとき



最大値：$f(a+3)=3a+13$

(i)～(iii)より，

(答) $\begin{cases} a<-\dfrac{17}{4} \text{ のとき} & -a-4 & (x=a) \\ a=-\dfrac{17}{4} \text{ のとき} & \dfrac{1}{4} & \left(x=-\dfrac{17}{4},\ -\dfrac{5}{4}\right) \\ -\dfrac{17}{4}<a \text{ のとき} & 3a+13 & (x=a+3) \end{cases}$

$\boxed{6}$

$0 \leqq k \leqq 1$ をみたす k を用いると，

$|x|+|y|=1 \Leftrightarrow (x,y)=\left(\pm k, \pm(1-k)\right), \left(\pm k, \pm(k-1)\right)$ (複号同順)

$|2x+y|=|-(2x+y)|=|2\cdot(-x)+(-y)|$ より，

$(x,y)=(k,1-k), \left(-k,-(1-k)\right)$ のいずれの場合も$|2x+y|$ の値は等しくなり，

$(x,y)=(k,k-1), \left(-k,-(k-1)\right)$ の場合も同様。

さらに $|x-3y|$ についても同様のことがいえるので，$0 \leqq k \leqq 1$として

(i) $(x,y)=(k,1-k)$，(ii) $(x,y)=(k,k-1)$ の 2 つの場合を考える。

(i) $(x,y)=(k,1-k)$ のとき

$$\begin{aligned}|2x+y|+|x-3y| &= |2k+1-k|+|k-3+3k| \\ &= |k+1|+|4k-3| \\ &= \begin{cases} k+1+4k-3=5k-2 & \left(\dfrac{3}{4} \leqq k \leqq 1\right) \\ k+1-(4k-3)=-3k+4 & \left(0 \leqq k \leqq \dfrac{3}{4}\right) \end{cases}\end{aligned}$$

よって最小値は $k=\dfrac{3}{4}$ のとき $\dfrac{7}{4}$

(ii) $(x,y)=(k,k-1)$ のとき

$$\begin{aligned}|2x+y|+|x-3y| &= |2k+k-1|+|k-3k+3| \\ &= |3k-1|+|3-2k| \\ &= |3k-1|+|2k-3| \\ &= \begin{cases} 3k-1-(2k-3)=k+2 & \left(\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq 1\right) \\ -(3k-1)-(2k-3)=-5k+4 & \left(0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{3}\right) \end{cases}\end{aligned}$$

よって最小値は $k=\dfrac{1}{3}$ のとき $\dfrac{7}{3}$

(i),(ii)より $(x,y)=\left(\pm\dfrac{3}{4}, \pm\dfrac{1}{4}\right)$ (複号同順)のとき $\dfrac{7}{4}$ …(答)